تعريف :

لتكن A مجموعة غير خالية و F(A) نعني زمرة التحويلات التامة للمجموعة A، اثبت أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون $\psi \in F(A)$ قاسم أيسر للعنصر $\phi \in F(A)$ هو أن يكون $\phi(A) \subseteq \psi(A)$

الحل :

نفرض أن ψ قاسم أيسر لـ ϕ ⇐ يوجد عنصر $g \in F(A)$ بحيث يكون $\phi = \psi g$

وبالتالي فإن $\phi(A) = (\psi g)(A) \subseteq \psi(A)$

$f : X \to Y$ $f(x) \subseteq Y$

$g : A \to A$ $g(A) \subseteq A$ $\Rightarrow \psi(g(A)) \subseteq \psi(A)$

العكس :

نفرض أن $\phi(A) \subseteq \psi(A)$ ⇐ $\forall x \in A$ فإن $\phi(x) \in \psi(A)$ ⇐ $\forall x \in A$

يوجد $u \in A$ بحيث يكون $\phi(x) = \psi(u)$

نعرف التحويل $h : A \to A$ بحيث يكون $h(x) = u$ $\forall x \in A$ يكون عندئذ

$\psi h(x) = \psi(u) = \phi(x) ; \forall x \in A \Rightarrow \psi h = \phi$

أي أن ψ قاسم أيسر لـ ϕ .

تعريف :

إذا كانت $(S, *)$ و $(T, \circ)$ نصفي زمرتين فإن الجداء الديكارتي

$S \times T = \{ (s, t) ; s \in S \ \& \ t \in T \}$

مع قانون التشكيل الداخلي

$(s, t)(s', t') = (s * s', t \circ t')$

تشكل نصف زمرة ندعوها الجداء المباشر لنصفي الزمرتين S, T

تعريف :

لتكن A , B مجموعتين غير خاليتين ، ولتكن $S = A \times B$ ولنعرف على S عملية الضرب التالية

$(a, b)(a', b') = (a, b')$ $\forall a, a' \in A$ $\forall b, b' \in B$

عندئذ ندعو S عصبة مستطيلة

تمرين:

أثبت أن نصف الزمرة S تكون ايزومورفية مع عصبة مستطيلة E اذا وفقط إذا كانت S ايزومورفية مع حداء المباشر لنصف زمرة صفرية يسارية ونصف زمرة صفرية يمينية

الحل:

نفرض أن S ايزومورفية مع الجداء المباشر لنصف زمرة صفرية يسارية A ونصف زمرة صفرية يمينية B أي أن S ايزومورفية مع $A \times B$ أي $S \approx A \times B$ فإنه مهما تكن

$$\forall a, a' \in A,\ \forall b, b' \in B;\ (a,b)(a',b') = (aa', bb') = (a, b')$$

مستوى (صفرية يسارية / صفرية يمينية)

وبالتالي فإن $A\times B$ عصبة مستطيلة أي أن S ايزومورفية مع عصبة مستطيلة

العكس:

نفرض أن S ايزومورفية مع عصبة مستطيلة E ولنبرهن أن E ايزومورفية مع الجداء المباشر لنصف زمرة صفرية يسارية مع نصف زمرة صفرية يمينية:

لتكن $E = A \times B$ حيث A, B غير خاليتين معنه

$$\forall a, a' \in A,\ b, b' \in B:\ (a,b)(a',b') = (a,b')$$

نعرف على A العملية التالية $\forall a, a' \in A:\ aa' = a$

نعرف على B العملية التالية $\forall b, b' \in A;\ bb' = b'$

ثم نعرف التطبيق

$$\varphi: A \times B \longrightarrow A \times B$$

الذي ينطلق من العصبة المستطيلة $E = A\times B$ ومستقره الجداء المباشر لنصفي الزمرتين A صفرية يسارية، B صفرية يمينية بالشكل التالي $\varphi(a,b) = (a,b)$ (التطبيق المطابق)

لأنه تطبيق متجانس

$$\varphi((a,b)(a',b')) = \varphi(a,b') = (a,b')$$

$$\varphi(a,b)\,\varphi(a',b') = (a,b)(a',b') = (aa', bb') = (a,b')$$

$$\Rightarrow \varphi((a,b)(a',b')) = \varphi(a,b)\,\varphi(a',b')$$

وبالتالي فإن ψ مورفيزم وبما أنه تطبيق تقابل فهو تقابل أي أنه إيزومورفيزم ومنه نستنتج أن G إيزومورفية مع الجداء المباشر لنصف زمرة بسيطة مع نصف زمرة صفرية معينة

نصف الزمرة المولدة :

تعريف : لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من نصف الزمرة G . إن المجموعة B المؤلفة من كل العناصر $b \in G$ التي يمكن التعبير عنها كجداء عناصر من A (إضافة إلى عناصر A) هي نصف زمرة جزئية مولدة من A ونقول عن A أنها مجموعة مولدات B ونكتب $B = \langle A \rangle$

وإذا كانت A مجموعة جزئية منتهية من G أي $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ عندئذٍ نكتب $B = \langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle$ بالشكل $B = \langle A \rangle$ ويمكن التعبير عن نصف الزمرة B التي مجموعة مولداتها A بالشكل

$$B = \langle A \rangle = A \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots$$

نتائج

① $\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$

② إذا كانت $A_1 \subseteq A_2$ فإن $\langle A_1 \rangle \subseteq \langle A_2 \rangle$

ملاحظة :

من المعروف أنه إذا كانت G نصف زمرة وكانت $\{K_i : i \in I\}$ مجموعة أنصاف زمر جزئية من G فإن $\bigcap_{i \in I} K_i$ هي مجموعة خالية أو نصف زمرة جزئية من G

إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من نصف زمرة G وكانت B هي تقاطع جميع أنصاف الزمر الجزئية من G الحاوية لـ A (G منها تحوي A) فإن B هي نصف زمرة جزئية من G تحقق ما يلي :

① $A \subseteq B$

② إذا كانت K نصف زمرة جزئية من G تحوي A فإن $B \subseteq K$ وبالتالي فإن B هي أصغر نصف زمرة جزئية تحوي A

تمرين :

لتكن G زمرة ، A مجموعة جزئية غير خالية من G . اثبت أن $B = \langle A \rangle$ إذا وفقط إذا كانت B هي تقاطع جميع الزمر الجزئية الحاوية على A

الحل :

لنفرض أولاً أن B هي عبارة عن تقاطع جميع أصناف الزمر الجزئية من G الحاوية على A ، إن $B \supseteq A$ وبما أن B هي زمرة جزئية من G فإن B تحوي جميع الجداءات الممكنة لعناصر A وبالتالي فإن $B \supseteq \langle A \rangle$

ومن ناحية أخرى لدينا دوماً $A \subseteq \langle A \rangle$ وبما أن B هي أصغر زمرة جزئية تحوي A ينتج $B \subseteq \langle A \rangle$

العكس: لنفرض أن $B = \langle A \rangle$ فإن كل زمرة جزئية من G تحوي A تكون حاوية لنفس الزمرة $\langle A \rangle$ وبالتالي تحوي B ومنه ينتج أن B هي أصغر زمرة جزئية تحوي A أي أن B هي عبارة عن تقاطع جميع أصناف الزمر الجزئية من G الحاوية على A

تعريف :

إذا كانت G زمرة وكانت A مجموعة جزئية غير خالية من G بحيث أن $\langle A \rangle = G$ فإن A هي مجموعة مولدات G

ملاحظة :

إن كل زمرة تملك مجموعة مولدات واحدة على الأقل مثلاً G نفسها هي مجموعة مولدات G لكنه نادراً يوجد عدة مجموعات مولدة لنفس الزمرة G وهذا واضح لأنه إذا كانت $A \subseteq G$ مجموعة مولدات لـ G فإذا أخذنا أي مجموعة جزئية من G تحوي A فهي مجموعة مولدة لـ G أيضاً

تعريف :

إذا كان a عنصراً من زمرة G فإن

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \ldots\} = \{a^n ; n \in N\}$$

نصف زمرة جزئية من S تسمى نصف زمرة جزئية دوارة من S مولدها هو a إذا كانت $\langle a \rangle$ وإذا كانت $S = \langle a \rangle$ فإننا نتحدث عن S أنها نصف زمرة دوارة مولدها a

إذا مرتبة أي عنصر $a \in S$ هو بالتعريف مرتبة نصف الزمرة $\langle a \rangle$